

# Über die Funktionen des Irrationalitätsmaßes

von Nikolay Moshchevitin<sup>1</sup>

## 1. Einleitung.

Sei  $\alpha$  eine reelle Zahl und sei

$$\psi_\alpha(t) = \min_{1 \leq q \leq t, q \in \mathbb{Z}} ||q\alpha||, \quad t \geq 1$$

die Funktion des Irrationalitätsmaßes für  $\alpha$  (hier bezeichnet  $||\xi|| = \min_{a \in \mathbb{Z}} |\xi - a|$  den Abstand zwischen  $\xi$  und der nächstgelegenen ganzen Zahl). Viele diophantische Eigenschaften der Zahl  $\alpha$  können durch Eigenschaften der Funktion  $\psi_\alpha(t)$  ausgedrückt werden. Ziel dieser Arbeit ist es, einige Verallgemeinerungen der Funktion  $\psi_\alpha(t)$  zu betrachten und einige entsprechende diophantische Behauptungen zu beweisen.

### 1.1. Kettenbrüche und die Funktionen des Irrationalitätsmaßes.

Für eine reelle irrationale Zahl  $\alpha \in [0, 1]$  definieren wir die unendliche Sequenz der Teilnenner

$$\mathfrak{A} : a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots,$$

sodass

$$\alpha = [0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n + \dots}}}}.$$

Wir betrachten die Näherungsbrüche

$$\frac{p_n}{q_n} = [0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

und setzen

$$\xi_n = ||q_n \alpha|| = |q_n \alpha - p_n|$$

und

$$p_0 = 0, q_0 = 1, \quad p_{-1} = 1, q_{-1} = 0.$$

Für die Gitterpunkte  $\mathbf{z}_n = (p_n, q_n) \in \mathbb{Z}^2$  gilt

$$\mathbf{z}_n = a_n \mathbf{z}_{n-1} + \mathbf{z}_{n-2}. \quad (1)$$

Seien

$$\alpha_n = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots], \quad \alpha_n^* = [0; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1],$$

dann gelten die Gleichungen

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} = \alpha_n^* \quad (2)$$

und

$$\frac{\xi_{n-1}}{\xi_n} = \alpha_{n+1}. \quad (3)$$

<sup>1</sup>Steklov-Institut für Mathematik der Russischen Akademie der Wissenschaften. Diese Arbeit wurde unterstützt durch RNF Grant No. 14-11-00433.

Aus dem Lagrangeschen Gesetz der besten Näherung folgt, dass

$$\psi_\alpha(t) = \xi_n \text{ für } q_n \leq t < q_{n+1}.$$

Also die Funktion  $\psi_\alpha(t)$  ist auf den Intervallen  $(q_n, q_{n+1})$  konstant. An den Stellen  $q_n$  die Funktion  $\psi_\alpha(t)$  unstetig ist.

In dieser Arbeit untersuchen wir zwei Funktionen

$$\psi_\alpha^{[2]}(t) = \min_{\substack{(q,p) : q,p \in \mathbb{Z}, 1 \leq q \leq t, \\ (p,q) \neq (p_n, q_n) \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots}} |q\alpha - p|$$

und

$$\psi_\alpha^{[2]*}(t) = \min_{\substack{(q,p) : q,p \in \mathbb{Z}, 1 \leq q \leq t, \\ p/q \neq p_n/q_n \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots}} |q\alpha - p|,$$

die mit den “zweitbesten Approximationen” verbunden. Beide Funktionen  $\psi_\alpha^{[2]}(t)$  und  $\psi_\alpha^{[2]*}(t)$  sind für  $t \geq 1$  definiert und sind stückweise konstant. Für diese Funktionen betrachten wir die ganzzahligen Sequenzen der Stellen

$$\mathfrak{Q} : \mathfrak{q}_1 = 1, \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_\nu, \dots$$

und

$$\mathfrak{X} : \mathfrak{x}_1 = 1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_n, \dots$$

wo diese Funktionen unstetig sind.

Definieren wir den Wert

$$\mathfrak{t} = \begin{cases} 2, & \text{falls entweder } a_1 = 1, a_2 \geq 2 \text{ oder } a_1 \geq 3 \\ 3, & \text{falls entweder } a_1 = a_2 = 1, a_3 \geq 2 \text{ oder } a_1 = 2, a_2 \geq 2 \\ 4, & \text{falls entweder } a_1 = a_2 = a_3 = 1 \text{ oder } a_1 = 2, a_2 = 1 \end{cases}.$$

Man hat

$$\psi_\alpha^{[2]}(t) = \min_{\substack{1 \leq q \leq t, q \in \mathbb{Z} \\ q \neq q_n \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots}} ||q\alpha||$$

wenn  $t \geq \mathfrak{t}$ . Also falls  $\mathfrak{q}_\nu, \mathfrak{x}_\nu \geq \mathfrak{t}$ ,

$$\text{für } \mathfrak{q}_\nu \leq t < \mathfrak{q}_{\nu+1} \text{ gilt } \psi_\alpha^{[2]}(t) = ||\mathfrak{q}_\nu \alpha||,$$

und

$$\text{für } \mathfrak{x}_\nu \leq t < \mathfrak{x}_{\nu+1} \text{ gilt } \psi_\alpha^{[2]*}(t) = ||\mathfrak{x}_\nu \alpha||.$$

Es ist klar, dass

$$\psi_\alpha(t) < \psi_\alpha^{[2]}(t) \leq \psi_\alpha^{[2]*}(t), \quad \forall t.$$

In den Punkten 2 und 3 ziehen wir die Regeln (Sätze 1 und 2), wie die Sequenzen  $\mathfrak{Q}, \mathfrak{X}$  aus der Sequenz  $\mathfrak{A}$  konstruieren können werden.

## 1.2. Das Lagrangesche Spektrum und die Spektren für die Funktionen $\psi_\alpha^{[2]}, \psi_\alpha^{[2]*}$ .

Für irrationalen  $\alpha$  bei

$$\lambda(\alpha) = \liminf_{t \rightarrow \infty} t\psi_\alpha(t)$$

bezeichnen wir die Lagrangesche Konstant für  $\alpha$ . Die Menge

$$\mathbb{L} = \{\lambda : \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ such that } \lambda = \liminf_{t \rightarrow \infty} t \cdot \psi_\alpha(t)\}$$

der Werte  $\lambda(\alpha)$  heißt das Lagrangesche Spectrum.

Wir definieren die Werte

$$\mathfrak{j}(\alpha) = \inf_{t \geq \mathfrak{t}} t \psi_\alpha^{[2]}(t) = \inf_{\nu: \mathfrak{q}_\nu \geq \mathfrak{t}} \mathfrak{k}_\nu, \quad \mathfrak{k}(\alpha) = \liminf_{t \rightarrow \infty} t \psi_\alpha^{[2]}(t) = \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \mathfrak{k}_\nu, \quad (4)$$

wo

$$\mathfrak{k}_\nu = \mathfrak{k}_\nu(\alpha) = \mathfrak{q}_\nu ||\mathfrak{q}_\nu \alpha||,$$

und

$$\mathfrak{j}^*(\alpha) = \inf_{t \geq \mathfrak{t}} t \psi_\alpha^{[2]*}(t) = \inf_{\nu: \mathfrak{x}_\nu \geq \mathfrak{t}} \mathfrak{k}_\nu^*, \quad \mathfrak{k}^*(\alpha) = \liminf_{t \rightarrow \infty} t \psi_\alpha^{[2]*}(t) = \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \mathfrak{k}_\nu^*, \quad (5)$$

wo

$$\mathfrak{k}_\nu^* = \mathfrak{k}_\nu^*(\alpha) = \mathfrak{x}_\nu ||\mathfrak{x}_\nu \alpha||.$$

Es ist klar, dass

$$\mathfrak{j}(\alpha) \leq \mathfrak{k}(\alpha), \quad \mathfrak{j}^*(\alpha) \leq \mathfrak{k}^*(\alpha).$$

Bemerken wir, dass für alle  $\alpha$  gilt

$$\mathfrak{k}^*(\alpha) \geq \mathfrak{k}(\alpha) \geq 2\lambda(\alpha), \quad (6)$$

und für  $\alpha \sim \sqrt{2}$  man hat

$$\mathfrak{k}^*(\alpha) = \mathfrak{k}(\alpha) = 2\lambda(\alpha). \quad (7)$$

Wir werden Formeln (6,7) im Punkt 4.2 beweisen.

Wir untersuchen hier die neuen Spektra

$$\mathbb{L}_2 = \{\lambda : \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ mit } \lambda = \liminf_{t \rightarrow \infty} t \cdot \psi_\alpha^{[2]}(t)\}$$

und

$$\mathbb{L}_2^* = \{\lambda : \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ mit } \lambda = \liminf_{t \rightarrow \infty} t \cdot \psi_\alpha^{[2]*}(t)\},$$

die durch die Funktionen  $\psi^{[2]}(t)$  und  $\psi^{[2]*}(t)$  definieren werden. Wir formulieren and beweisen zwei Sätze über die Struktur der Spektra  $\mathbb{L}_2$  und  $\mathbb{L}_2^*$  in den Punkten 4.3 und 4.3.

### 1.3. Der Legendresche Satz und Verallgemeinerungen.

Die bekannteste Version des Satzes von Legendre ist die folgende: *Falls  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$  und  $(p, q) = 1$ , der Bruch  $\frac{p}{q}$  ein Näherungsbruch für  $\alpha$  ist.* Aber das originale Ergebnis von Legendre (siehe [6] und [10] S.42-45, [11] S. 42-43.) ist eine stärkere Behauptung. Es gibt uns ein Kriterium für  $\alpha$ , den Bruch  $\frac{p}{q}$  als einen Näherungsbruch zu haben.

**Satz von Legendre.** *Sei  $\frac{p}{q}$ ,  $(p, q) = 1$  eine rationale Zahl. Für irrationale  $\alpha$  betrachten wir den Wert*

$$\theta = q \cdot (q\alpha - p).$$

Für  $\frac{p}{q}$  definieren wir die Kettenbruch

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \dots, a_t],$$

mit  $a_t \geq 1$ , wo  $t$  gerade ist falls  $\theta < 0$ , und  $t$  ungerade ist falls  $\theta > 0$ . Definieren wir den Bruch

$$\frac{p'}{q'} = [a_0; a_1, \dots, a_{t-1}].$$

Dann die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass  $\frac{p}{q}$  ein Näherungsbruch von  $\alpha$  ist, lautet daher:

$$|\theta| < \frac{q}{q + q'}.$$

Lucas (siehe [8] S. 447-449 und [7] S. 229)<sup>2</sup> hat ein gleiches Kriterium formuliert, mit keine Referenz. Wir formulieren die Version des Kriteriums aus [7].

**Satz von Lucas.** Seien  $\frac{p_{t-1}}{q_{t-1}}$  und  $\frac{p_t}{q_t}$  zwei sukzessive Näherungsbrüche für eine Zahl  $\eta$ . Dann  $\frac{p_{t-1}}{q_{t-1}}$  und  $\frac{p_t}{q_t}$  sind zwei sukzessive Näherungsbrüche für  $\alpha$  dann und nur dann, wenn

$$\left| \alpha - \frac{p_t}{q_t} \right| < \frac{1}{q_t(q_t + q_{t-1})}.$$

Die Natur dieser Sätze ist klar. Gegeben einen Bruch  $\frac{p}{q}$ , sollen wir die Farey-Folge  $q$ -ter Ordnung  $\mathfrak{F}_q$  betrachten. Seien  $r_{j-1} < r_j = \frac{p}{q} < r_{j+1}$  drei sukzessive Elemente aus  $\mathfrak{F}_q$ . Für den einzigen Kettenbruch

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \dots, a_t], \quad a_t \geq 2$$

haben wir

$$r_{j-1} = \frac{p_-}{q_-} = [a_0; a_1, \dots, a_{t-1}], \quad r_{j+1} = \frac{p_+}{q_+} = [a_0; a_1, \dots, a_t - 1],$$

oder

$$r_{j-1} = \frac{p_-}{q_-} = [a_0; a_1, \dots, a_t - 1], \quad r_{j+1} = \frac{p_+}{q_+} = [a_0; a_1, \dots, a_{t-1}],$$

bezüglich der Parität. Dann  $\frac{p}{q}$  ein Näherungsbruch von  $\alpha$  ist dann und nur dann, wenn

$$\alpha \in \left( \frac{p + p_-}{q + q_-}, \frac{p + p_+}{q + q_+} \right).$$

Bemerken wir, dass das Kriterium von Legendre ist eine Aussage, die gibt uns für eine gegebene rationale Zahl  $\frac{p}{q}$  eine notwendige und hinreichende Bedingung für  $\alpha$ , den Bruch  $\frac{p}{q}$  als einen Näherungsbruch zu haben. Wir wollen hier zwei Behauptungen formulieren, die für eine gegebene irrationale Zahl  $\alpha$  geben die Bedingungen für den Bruch  $\frac{p}{q}$  ein Näherungsbruch für  $\alpha$  zu sein. Diese Behauptungen folgen sofort aus den Definitionen der Funktionen  $\psi_\alpha^{[2]}(t)$  und  $\psi_\alpha^{[2]*}(t)$ :

1) Falls

$$||q\alpha|| < \psi_\alpha^{[2]}(q),$$

$q$  ein Nenner eines Näherungsbruches für  $\alpha$  ist.

2) Falls

$$|q\alpha - p| < \psi_\alpha^{[2]*}(q),$$

und  $(p, q) = 1$ , der Bruch  $\frac{p}{q}$  ein Näherungsbruch für  $\alpha$  ist.

---

<sup>2</sup>Der Autor dankt Prof. Yu. Nesterenko für diese Referenzen.

Aus den Definitionen der Werte  $\mathbf{j}(\alpha)$ ,  $\mathbf{k}(\alpha)$  und  $\mathbf{j}^*(\alpha)$ ,  $\mathbf{k}^*(\alpha)$  haben wir die folgenden Behauptungen:

- 3) Falls  $q||q\alpha|| < \mathbf{j}(\alpha)$ ,  $q$  ein Nenner eines Näherungsbruches für  $\alpha$  ist.
- 4) Für  $\varepsilon > 0$  gibt es eine effektiv berechenbare Konstante  $T = T(\alpha, \varepsilon)$  mit der folgenden Eigenschaft: falls  $q \geq T$  und  $q||q\alpha|| \leq \mathbf{k}(\alpha) - \varepsilon$ ,  $q$  ein Nenner eines Näherungsbruches für  $\alpha$  ist.
- 5) Falls  $q \cdot |q\alpha - p| < \mathbf{j}^*(\alpha)$  und  $(p, q) = 1$ , der Bruch  $\frac{p}{q}$  ein Näherungsbruch für  $\alpha$  ist.
- 6) Für  $\varepsilon > 0$  gibt es eine effektiv berechenbare Konstante  $T^* = T^*(\alpha, \varepsilon)$  mit der folgenden Eigenschaft: falls  $q \geq T^*$  und  $q \cdot |q\alpha - p| \leq \mathbf{k}^*(\alpha) - \varepsilon$ ,  $(q, p) = 1$ , der Bruch  $\frac{p}{q}$  ein Näherungsbruch für  $\alpha$  ist.

#### 1.4. Die Beispiele.

Diskutieren wir einige Beispiele für spezielle Zahlen.

- Betrachten wir die Zahl  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Dann

$$\mathbf{j}(\tau) = \mathbf{j}^*(\tau) = 8(\sqrt{5} - 2), \quad \mathbf{j}(\tau) = \frac{4}{\sqrt{5}}, \quad \mathbf{k}^*(\tau) = \sqrt{5}.$$

Also

- 1) falls  $q||q\tau|| < 8(\sqrt{5} - 2)$ ,  $q$  eine Fibonacci-Zahl ist;
  - 2) zu jedem  $\varepsilon > 0$ , falls  $q$  hinreichend groß ist und  $||q\tau|| \leq \frac{4-\varepsilon}{\sqrt{5} \cdot q}$ , die Zahl  $q$  eine Fibonacci-Zahl ist;
  - 3) zu jedem  $\varepsilon > 0$  falls  $q$  hinreichend groß ist und  $\left| \tau - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\sqrt{5}-\varepsilon}{q^2}$ ,  $(p, q) = 1$ , der Bruch  $\frac{p}{q}$  ein Näherungsbruch für  $\tau$  ist;
- Betrachten wir die Zahl  $\xi = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ . Dann  $\mathbf{k}(\xi) = \frac{4}{\sqrt{17}}$  und zu jedem  $\varepsilon > 0$  falls  $q$  hinreichend groß ist und  $||q\xi|| \leq \frac{4-\varepsilon}{\sqrt{17} \cdot q}$ , die Zahl  $q$  ein Nenner eines Näherungsbruches für  $\xi$  ist.
  - Betrachten wir die Zahl  $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ . Dann  $\mathbf{k}^*(e) = \frac{3}{2}$  und zu jedem  $\varepsilon > 0$  falls  $q$  hinreichend groß ist und  $\left| e - \frac{p}{q} \right| \leq \left( \frac{3}{2} - \varepsilon \right) \cdot \frac{1}{q^2}$  mit  $(p, q) = 1$ , der Bruch  $\frac{p}{q}$  ein Näherungsbruch für  $e$  ist.

#### 2. Über die Funktion $\psi_{\alpha}^{[2]}(t)$ .

Wir formulieren hier eine allgemeine Regel, die die Sequenz  $\mathfrak{Q}$  aus der Sequenz  $\mathfrak{A}$  konstruiert.

**Satz 1.** Die Sequenz  $\mathfrak{Q}$  wird mit der folgenden Regel aus der Sequenz  $\mathfrak{A}$  erhalten:

1. jedes Element  $a_n \geq 3$  wird durch sukzessive Zahlen

$$q_{n-2} + q_{n-1}, \quad 2q_{n-1}, \quad q_n - q_{n-1} \tag{8}$$

ersetzen;

2. jedes Element  $a_n = 2$  wird durch eine Zahl

$$q_n - q_{n-1}$$

ersetzen;

3. falls  $a_{n-1} \neq 1, a_n = 1, a_{n+1} \geq 2$ , das Element  $a_n = 1$  wird durch eine Zahl

$$q_{n-2} + q_n = 2q_{n-2} + q_{n-1}$$

ersetzen;

4. falls  $r \geq 2$  und  $a_{n-1} \neq 1, a_n = \dots = a_{n+r-1} = 1, a_{n+r} \geq 2$ , die Elemente  $a_n = \dots = a_{n+r-1} = 1$  werden durch sukzessive Zahlen

$$2q_{n-2} + q_{n-1}, 2q_{n-1}, 2q_n, \dots, 2q_{n+r-2}, 2q_{n+r-3} + q_{n+r-2} \quad (9)$$

ersetzen;

5. falls  $a_{n-1} \neq 1, a_j = 1, \forall j \geq n$ , die Elemente  $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \dots$  werden durch Zahlen

$$2q_{n-2} + q_{n-1}, 2q_{n-1}, 2q_n, 2q_{n+1}, \dots$$

ersetzen.

### Bemerkung 1.

1.1. Falls  $n \geq 3$  oder  $n = 2, a_n \geq 3$ , alle Zahlen in den Formeln (8) und (9) unterschiedlich sind. So werden in (8) drei verschiedene Zahlen geschrieben, und in (9) werden  $r + 2$  verschiedene Zahlen geschrieben.

1.2. Für  $n = 1$  und  $a_1 = 3$  in (8) haben wir nur zwei verschiedene Zahlen

$$1 = q_{-1} + q_0, \quad 2 = 2q_0 = q_1 - q_0.$$

1.3. Für  $n = 1, a_1 = 1$  und  $r \geq 4$  in (9) haben wir nur  $r + 1$  verschiedene Zahlen

$$1 = 2q_{-1} + q_0, 2 = 2q_0 = 2q_1, 4 = 2q_2, \dots, 2q_{r-1}, 2q_{r-2} + q_{r-1}.$$

1.4. Für  $n = 1, a_1 = 1$  und  $r = 3$  in (9) haben wir drei verschiedene Zahlen

$$1 = 2q_{-1} + q_0, 2 = 2q_0 = 2q_1, 4 = 2q_2 = 2q_1 + q_2.$$

1.5. Für  $n = 1, a_1 = 1$  und  $r = 2$  in (9) haben wir drei verschiedene Zahlen

$$1 = 2q_{-1} + q_0, 2 = 2q_0 = 2q_1, 3 = 2q_0 + q_1$$

2. Falls  $a_1 = a_2 = 1, a_3 \geq 2$ , für die Teilnenner  $a_1 = a_2 = 1$  Punkt 4 des Satzes 1 gibt das Element  $3 = 2q_0 + q_1$  der Sequenz  $\mathfrak{Q}$ . Für den Teilnenner  $a_3 \geq 3$  Punkt 1 des Satzes 1 (oder Punkt 2, falls  $a_3 = 2$ ) gibt das Element  $3 = q_1 + q_2$  auch. In allen anderen Fällen für verschiedene  $n$  gibt die Regel des Satzes 1 verschiedene Zahlen in  $\mathfrak{Q}$ .

Für den Gitterpunkt  $\mathbf{z} = (q, p) \in \mathbb{Z}^2$  setzen wir

$$q = q(\mathbf{z}), \quad \xi = \xi(\mathbf{z}) = |q\xi - p|.$$

Nun formulieren wir eine einfache und wichtige Behauptung, die aus der Definition der Funktion  $\psi^{[2]}(t)$  folgt sofort.

**Haupthilfssatz 1.** Um zu zeigen, dass  $x_1 < x_2$  zwei sukzessive Elemente aus  $\mathfrak{Q}$  sind, genügt es, folgendes zu beweisen:

- für einige  $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$  die Gitterpunkte  $\mathbf{w}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{w}_2 = (x_2, y_2)$  auf dem Rand des Parallelogrammes

$$\Pi[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] = \{\mathbf{z} = (x, z) : 0 \leq x \leq x_2, |ax - y| \leq \xi(\mathbf{w}_1) = |ax_1 - y_1|\}$$

liegen;

- das Parallelogramm

$$\Omega[\mathbf{w}_1] = \{\mathbf{z} = (x, z) : 0 \leq x \leq x_1, |ax - y| \leq \xi(\mathbf{w}_1) = |ax_1 - y_1|\} \subset \Pi[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]$$

hat einen inneren Punkt  $\mathbf{z}_{\nu_1} = (p_{\nu_1}, q_{\nu_1})$ ;

- das Parallelogramm

$$\Omega[\mathbf{w}_2] = \{\mathbf{z} = (x, z) : 0 \leq x \leq x_2, |\alpha x - y| \leq \xi(\mathbf{w}_2) = |\alpha x_2 - y_2|\} \subset \Pi[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]$$

hat einen inneren Punkt  $\mathbf{z}_{\nu_2} = (p_{\nu_2}, q_{\nu_2})$ ;

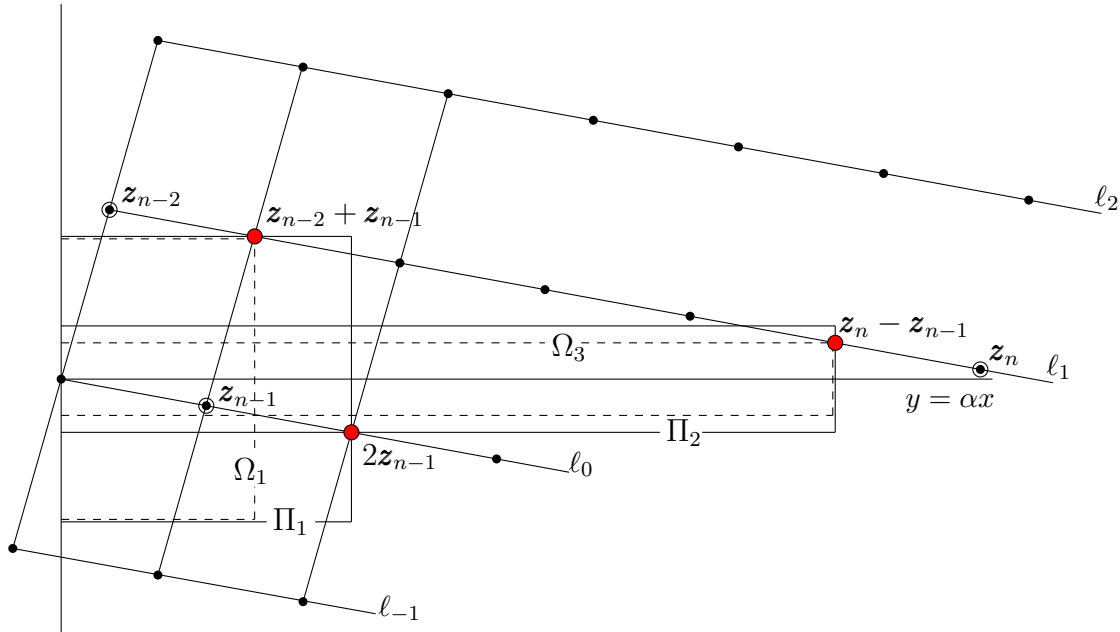
- falls  $\mathbf{z} \in \Pi[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]$  ein Gitterpunkt ist, dann  $\mathbf{z} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$  oder  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_\nu$  mit einem  $\nu \geq -1$ .

In das Folgendes, Elemente der Sequenz  $\Omega$  entsprechen roten Punkten auf den Figuren 1 - 7. Wir leiten nun aus diesem Haupthilfssatz Hilfssätze 1 - 7 her. Diese Hilfssätze beweisen die Regeln aus Satz 1. Sie erhalten aus den Teilnenner für  $\alpha$  die Elemente der Sequenz  $\Omega$  und verbinden die einzelnen Blöcke. Satz 1 folgt daraus.

**Hilfssatz 1.** Sei  $a_n \geq 3$ . Dann

$$q_{n-2} + q_{n-1}, \quad 2q_{n-1}, \quad q_n - q_{n-1}$$

sind drei sukzessive Elemente der Sequenz  $\Omega$ .



Figur 1:  $a_n = 6$

Beweis (siehe Fig. 1). Beweisen wir, dass

$$\xi(\mathbf{z}_{n-2} + \mathbf{z}_{n-1}) = \xi_{n-2} - \xi_{n-1} > \xi(2\mathbf{z}_{n-1}) = 2\xi_{n-1} > \xi(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}) = \xi_{n-1} + \xi_n. \quad (10)$$

Wegen  $a_n \geq 3$  hat man  $\frac{\xi_{n-2}}{\xi_{n-1}} = \alpha_n > a_3 \geq 3$ , und die erste Ungleichung aus (10) folgt. Wegen  $\xi_{n-1} > \xi_n$  haben wir die zweite Ungleichung bewiesen auch.

Betrachten wir die Parallelogramme

$$\Pi_1 = \Pi[\mathbf{z}_{n-2} + \mathbf{z}_{n-1}, 2\mathbf{z}_{n-1}] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2q_{n-1}, |\alpha x - y| \leq \xi_{n-2} - \xi_{n-1}\},$$

$$\Pi_2 = \Pi[2\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq q_n - q_{n-1}, |\alpha x - y| \leq 2\xi_{n-1}\},$$

und

$$\Omega_1 = \Omega[\mathbf{z}_{n-2} + \mathbf{z}_{n-1}] \subset \Pi_1, \quad \Omega_2 = \Omega[2\mathbf{z}_{n-1}] = \Pi_1 \cap \Pi, \quad \Omega_3 = \Omega[\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}] \subset \Pi_2.$$

Jedes Parallelogramm  $\Pi_j$  hat zwei Gitterpunkte auf dem Rand. Die Punkte  $\mathbf{z}_{n-2} + \mathbf{z}_{n-1}$  und  $2\mathbf{z}_{n-1}$  sind diese Punkte für  $\Pi_1$ . Die Punkte  $2\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}$  sind diese Punkte für  $\Pi_2$ . Der Punkt  $2\mathbf{z}_{n-1}$  gehört beiden Parallelogrammen  $\Pi_1, \Pi_2$ .

Es ist klar, dass

$$q_{n-1} < q_{n-2} + q_{n-1} < \min\{2q_{n-1}, q_n\}. \quad (11)$$

Aus (1) folgt

$$\xi_n = \xi_{n-2} - a_n \xi_{n-1},$$

sodass

$$\xi_{n-1} < \xi(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}) = \xi_n + \xi_{n-1} < \xi(\mathbf{z}_{n-2} + \mathbf{z}_{n-1}) = \xi_{n-2} - \xi_{n-1} < 2\xi_{n-1}. \quad (12)$$

Wir sehen aus (11,12), dass der Gitterpunkt  $\mathbf{z}_{n-1}$  ein inner Punkt für alle Parallelogramme  $\Pi_1, \Pi_2, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  ist:

$$\mathbf{z}_{n-1} \in \text{int}(\Omega_1 \cap \Omega_3) \subset \text{int}(\Omega_2). \quad (13)$$

Nun beweisen wir, dass

$$(\Pi_1 \cup \Pi_2) \cap \mathbb{Z}^2 = \{\mathbf{0}, \mathbf{z}_{n-2} + \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_{n-1}, 2\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}\}. \quad (14)$$

Das Gitter  $\mathbb{Z}^2$  teilt sich in den Linien

$$\mathbb{Z}^2 = \bigcup_{u \in \mathbb{Z}} \ell_u, \quad \ell_u = \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 : \mathbf{z} = u\mathbf{z}_{n-2} + v\mathbf{z}_{n-1}, v \in \mathbb{Z}\}.$$

Falls  $\mathbf{z} \in \ell_u$  mit  $u \neq 0, 1$ ,

$$\xi(\mathbf{z}) > \xi_{n-2} > \xi_{n-2} - \xi_{n-1} = \xi(\mathbf{z}_{n-2} + \mathbf{z}_{n-1}),$$

und  $\mathbf{z} \notin \Pi_1 \cup \Pi_2$ .

Falls  $\mathbf{z} \in \ell_0$ , haben wir  $\mathbf{z}_{n-1}, 2\mathbf{z}_{n-1} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$ , aber für  $v \geq 3$  gilt

$$\xi(v\mathbf{z}_{n-1}) \geq 3\xi_{n-1} > \xi_n + \xi_{n-1} = \xi(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}), \quad q(v\mathbf{z}_{n-1}) > 2q_{n-1},$$

und  $\mathbf{z} \notin \Pi_1 \cup \Pi_2$ .

Falls  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_{n-2} + v\mathbf{z}_{n-1} \in \ell_1$ , haben wir  $\mathbf{z}_{n-2} + \mathbf{z}_{n-1} \in \Pi_1$  und  $\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1} \in \Pi_2$ , aber für  $2 \leq v \leq a_n - 2$  gilt

$$\xi(v\mathbf{z}) \geq 2\xi_{n-1} + \xi_n > 2\xi_{n-1} = \xi(2\mathbf{z}_{n-1}), \quad q(\mathbf{z}) = q_{n-2} + vq_{n-1} > 2q_{n-1},$$

und  $\mathbf{z} \notin \Pi_1 \cup \Pi_2$ . Für  $v \geq a_n$  alles ist klar, und (14) bewiesen ist.

Hilfssatz 1 folgt aus (10,14) und (13).  $\square$

**Hilfssatz 2.** Sei  $a_n \geq 2$  und  $a_{n+1} \geq 2$ . Dann

$$q_n - q_{n-1}, \quad q_n + q_{n-1}$$

sind zwei sukzessive Elemente der Sequenz  $\Omega$ .

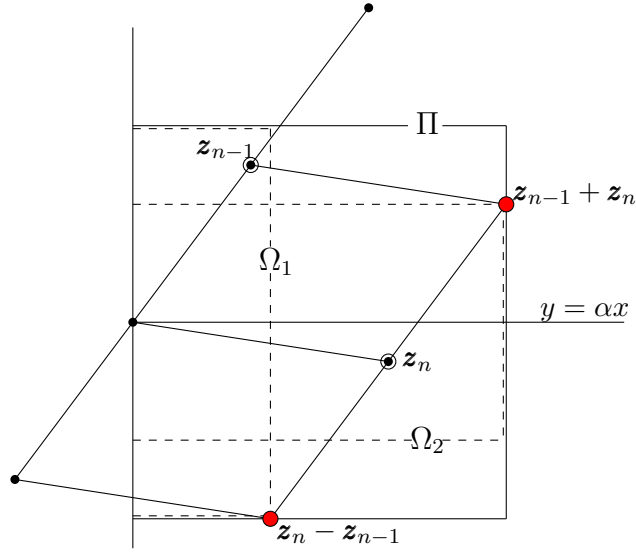
Beweis (siehe Fig. 2). Bemerken wir, dass die Brüche  $\frac{p_n - p_{n-1}}{q_n - q_{n-1}}, \frac{p_n - p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}$  sind Näherungsbrüche nicht, und

$$\xi(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}) = \xi_n + \xi_{n-1} > \xi_n - \xi_{n-1} = \xi(\mathbf{z}_n + \mathbf{z}_{n-1}).$$

Betrachten wir das Parallelogramm

$$\Pi = \Pi[\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n + \mathbf{z}_{n-1}] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq q_n + q_{n-1}, |\alpha x - y| \leq \xi_{n-1} + \xi_n\},$$





Figur 2:  $a_n, a_{n+1} \geq 2$

und die Parallelogramme

$$\Omega_1 = \Omega[\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq q_n - q_{n-1}, |\alpha x - y| \leq \xi_{n-1} + \xi_n\} \subset \Pi,$$

$$\Omega_2 = \Omega[\mathbf{z}_n + \mathbf{z}_{n-1}] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq q_n + q_{n-1}, |\alpha x - y| \leq \xi_{n-1} - \xi_n\} \subset \Pi.$$

Die Punkte  $\mathbf{z}_n \pm \mathbf{z}_{n-1}$  liegen auf dem Rand des Parallelogrammes  $\Pi$ .

Wegen  $a_n \geq 2$  haben wir

$$q_{n-1} < q_n - q_{n-1}. \quad (15)$$

Es ist klar, dass

$$\xi_{n-1} < \xi_n + \xi_{n-1} = \xi(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}). \quad (16)$$

Aus (15,16) folgt, dass  $\mathbf{z}_{n-1}$  ein inner Punkt für  $\Omega_1$  ist.

Wegen  $\frac{\xi_{n-1}}{\xi_n} = \alpha_{n+1} > a_{n+1} \geq 2$  haben wir

$$\xi_n < \xi_{n-1} - \xi_n = \xi(\mathbf{z}_{n-1} + \mathbf{z}_n), \quad (17)$$

und es ist klar, dass

$$q_n < q_n + q_{n-1}. \quad (18)$$

Aus (17,18) folgt, dass  $\mathbf{z}_n$  ein inner Punkt für  $\Omega_2$  ist.

Nun es genügt zu beweisen, dass  $\Pi$  keine Gitterpunkten hat, außer  $\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n$  und  $\mathbf{0}, \mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n + \mathbf{z}_{n-1}$  auf dem Rand.

Das Gitter  $\mathbb{Z}^2$  teilt sich in den Linien

$$\mathbb{Z}^2 = \bigcup_{u \in \mathbb{Z}} \ell_u, \quad \ell_u = \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 : \mathbf{z} = u\mathbf{z}_{n-1} + v(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}), v \in \mathbb{Z}\}.$$

Falls  $\mathbf{z} \in \ell_u$  mit  $|u| \geq 2$ , die Ungleichung

$$\xi(\mathbf{z}) > 2\xi_{n-1} - \xi_n > \xi_{n-1} + \xi_n = \xi(\mathbf{z}_{n-1} - \mathbf{z}_n)$$

gilt (die letzte Ungleichung aus  $\frac{\xi_{n-1}}{\xi_n} = \alpha_{n+1} > a_{n+1} \geq 2$  folgt). Sodass für diese  $u$  haben wir  $\ell_u \cap \Pi = \emptyset$ .

Es ist klar, dass  $\ell_{-1} \cap \Pi = \{\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}\}$ ,  $\ell_0 \cap \Pi = \{\mathbf{0}, \mathbf{z}_n\}$ ,  $\ell_1 \cap \Pi = \{\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n + \mathbf{z}_{n-1}\}$ .

Daraus folgt

$$\Pi \cap \mathbb{Z}^2 = \{\mathbf{0}, \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n, \mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n + \mathbf{z}_{n-1}\}.$$

Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.  $\square$

**Hilfssatz 3.** Sei  $a_n \geq 2$  und  $a_{n+1} = 1$ . Dann

$$q_n - q_{n-1}, \quad 2q_{n-1} + q_n$$

sind zwei sukzessive Elemente der Sequenz  $\Omega$ .

Beweis (siehe Fig. 3). Beweis des Hilfssatzes 3 verläuft analog zu dem Beweis des Hilfssatzes 2. Betrachten wir die Parallelorgamme

$$\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2q_{n-1} + q_n, \quad |\alpha x - y| \leq \xi_{n-1} + \xi_n\},$$

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq q_n - q_{n-1}, \quad |\alpha x - y| \leq \xi_{n-1} + \xi_n\} \subset \Pi,$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2q_{n-1} + q_n, \quad |\alpha x - y| \leq \xi_{n-1} - \xi_n\} \subset \Pi.$$

Nun  $\mathbf{z}_{n-1}$  ist ein inner Punkt fur  $\Omega_1$  t, und  $\mathbf{z}_n, \mathbf{z}_{n+1}$  sind innere Punkte fur  $\Omega_2$ . Fur das Gitter haben wir

$$\mathbb{Z}^2 = \bigcup_{u \in \mathbb{Z}} \ell_u, \quad \ell_u = \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 : \mathbf{z} = u\mathbf{z}_{n-1} + v\mathbf{z}_n, \quad v \in \mathbb{Z}\},$$

und

$$\ell_{-1} \cap \Pi = \{\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}\}, \ell_0 \cap \Pi = \{\mathbf{z}_n\}, \ell_1 \cap \Pi = \{\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_{n+1}\}, \ell_2 \cap \Pi = \{2\mathbf{z}_{n-1} + \mathbf{z}_n\}, \quad \ell_u \cap \Pi = \emptyset, \quad u \neq -1, 0, 1, 2.$$

Sodass

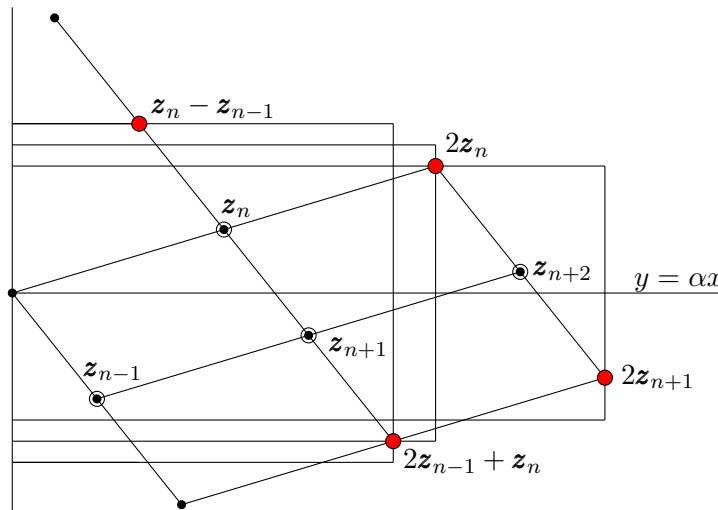
$$\Pi \cap \mathbb{Z}^2 = \{\mathbf{0}, \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n, \mathbf{z}_{n+1}, \mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}, 2\mathbf{z}_{n-1} + \mathbf{z}_n\}.$$

Hilfssatz 3 ist bewiesen.  $\square$

**Hilfssatz 4.** Sei  $a_n \geq 2$  und  $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$ . Dann

$$q_n - q_{n-1}, \quad 2q_{n-1} + q_n, \quad 2q_n, \quad 2q_{n+1}$$

sind vier sukzessive Elemente der Sequenz  $\Omega$ .



Figur 3:  $a_n \geq 2, a_{n+1} = a_{n+2} = 1$

Beweis (siehe Fig. 3). Aus Hilfssatz 3 folgt, dass  $q_n - q_{n-1}, 2q_{n-1} + q_n \in \mathfrak{Q}$ . Sei

$$\Omega = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2q_n, |x\alpha - y| \leq 2\xi_{n-1} - \xi_n = \xi(2z_{n-1} + z_n)\}.$$

Es genügt zu beweisen, dass

$$\xi(2z_n) = 2\xi_n < 2\xi_{n-1} - \xi_n = \xi(2z_{n-1} + z_n). \quad (19)$$

und

$$\Omega \cap \mathbb{Z}^2 = \{0, z_{n-1}, z_n, z_{n+1}, 2z_{n-1} + z_n, 2z_n\}, \quad (20)$$

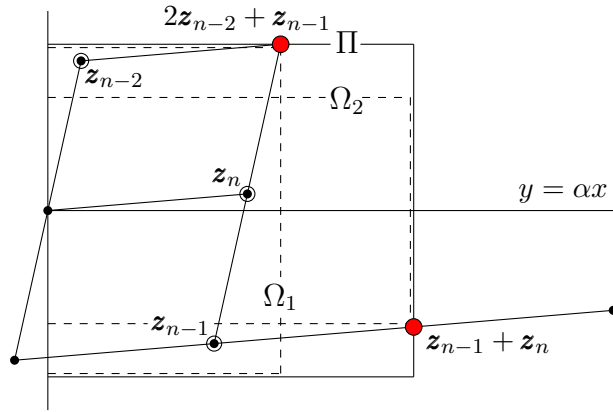
wo Punkte  $z_{n+1}, 2z_{n-1} + z_n$  auf dem Rand liegen und  $z_{n-1}, z_n, z_{n+1} \in \text{int } \Omega$ .

Für die Gitterpunkte in  $\Omega$  ist die Behauptung (20) klar. Die Ungleichung (19) folgt aus  $\frac{\xi_{n-1}}{\xi_n} = \alpha_{n+1} = [1; 1, \dots] = 1 + \frac{1}{1+\dots} > \frac{3}{2}$ .  $\square$

**Hilfssatz 5.** Sei  $a_n = 1$  und  $a_{n+1} \geq 2$ . Dann

$$2q_{n-2} + q_{n-1}, q_{n-1} + q_n$$

sind zwei sukzessive Elemente der Sequenz  $\mathfrak{Q}$ .



Figur 4:  $a_n = 1, a_{n+1} \geq 2$

Der Beweis verläuft analog (siehe Fig. 4). Wir betrachten die Punkte  $2z_{n-2} + z_{n-1}$  und  $z_{n-1} + z_n$  auf dem Rand des Parallelogrammes

$$\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq q_{n-1} + q_n, |\alpha x - y| \leq 2\xi_{n-2} - \xi_{n-1}\},$$

und beweisen, dass  $\Pi \cap \mathbb{Z}^2 = \{0, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n, 2z_{n-2} + z_{n-1}, z_{n-1} + z_n\}$ .  $\square$

**Hilfssatz 6.** Sei  $a_{n-1} = a_n = 1$  und  $a_{n+1} \geq 2$ . Dann

$$2q_{n-2}, 2q_{n-1}, 2q_{n-2} + q_{n-1}, q_{n-1} + q_n$$

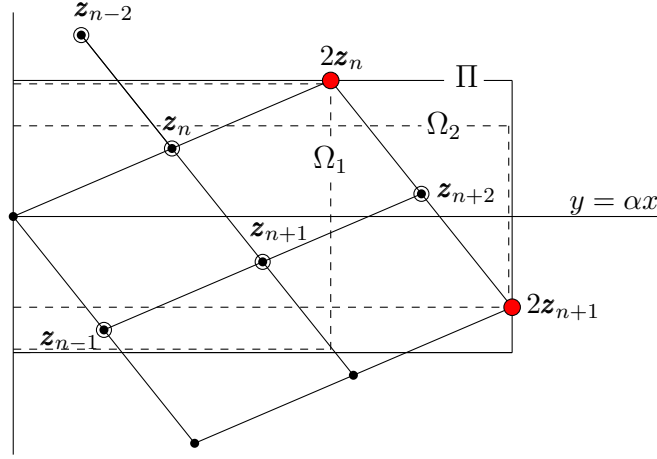
sind vier sukzessive Elemente der Sequenz  $\mathfrak{Q}$ .

Beweis analog zum Beweis des Hilfssatzes 4 ist.  $\square$

**Hilfssatz 7.** Sei  $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = 1$ . Dann

$$2q_n, 2q_{n+1}$$

sind zwei sukzessive Elemente der Sequenz  $\mathfrak{Q}$ .



Figur 5:  $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = 1$

Beweis (siehe Fig. 5). Betrachten wir die Parallelogramme  $\Pi = \Pi[2z_n, 2z_{n+1}]$ ,  $\Omega_1 = \Omega[2z_n]$ ,  $\Omega_2 = \Omega[2z_{n+1}]$  (Fig. 5).

Es ist klar, dass  $2\xi_{n+1} < 2\xi_n$ , und die Punkte  $2z_n, 2z_{n+1}$  auf dem Rand des Parallelogrammes  $\Pi$  liegen.

Aus  $\frac{\xi_n}{\xi_{n+1}} = \alpha_{n+2} < a_{n+2} + 1 = 2$  folgt  $\xi_n < 2\xi_{n+1}$  und

$$\xi_{n+2} < \xi_{n+1} < \xi_n < 2\xi_{n+1}.$$

Außerdem

$$q_n < q_{n+1} < q_{n+2} < 2q_{n+1}.$$

Sodass  $z_n, z_{n+1}, z_{n+2}$  sind innere Punkte des Parallelogrammes  $\Omega_2$ .

Aus  $\frac{\xi_{n-1}}{\xi_n} = \alpha_{n+1} < a_{n+1} + 1 = 2$  und  $q_{n+1} < 2q_n < q_{n+2}$  folgt, dass  $z_{n-1}, z_n, z_{n+1}$  sind innere Punkte des Parallelogrammes  $\Omega_1$ .

Wegen  $\frac{\xi_{n-1}}{\xi_n} = \alpha_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+\dots} > \frac{3}{2}$  haben wir

$$\xi(2z_{n-1} + z_n) = 2\xi_{n-1} - \xi_n > 2\xi_n = \xi(2z_n).$$

Außerdem

$$\xi(z_{n-2}) = \xi_{n-2} > 2\xi_n = \xi(2z_n).$$

Wir betrachten die Teilung  $\mathbb{Z}^2 = \bigcup_{u \in \mathbb{Z}} \ell_u$ ,  $\ell_u = \{z \in \mathbb{Z}^2 : z = uz_{n-1} + vz_n, v \in \mathbb{Z}\}$ , und ziehen

$$\Pi \cap \mathbb{Z}^2 = \{0, z_{n-1}, z_n, z_{n+1}, 2z_n, z_{n+2}, 2z_{n+1}\}.$$

Hilfssatz 7 bewiesen ist.  $\square$

### 3. Über die Funktion $\psi_\alpha^{[2]*}(t)$ .

Es gibt eine einfache Regel, die die Sequenz  $\mathfrak{X}$  aus der Sequenz  $\mathfrak{A}$  konstruiert.

**Satz 2.** Die Sequenz  $\mathfrak{X}$  wird mit dem folgenden Regel aus der Sequenz  $\mathfrak{A}$  erhalten:

1. jedes Element  $a_n \geq 2$  wird durch  $a_n - 1$  sukzessive Zahlen  $q_{n-2} + jq_{n-1}$ ,  $1 \leq j \leq a_n - 1$  ersetzen;
2. jedes Element  $a_n = 1$  wird durch eine Zahl  $2q_{n-2} + q_{n-1}$  ersetzen.

**Bemerkung 2.** Die Regel gibt uns verschiedene Elemente der Sequenz  $\mathfrak{X}$ . Die einzige Ausnahme ist im Fall  $a_1 = a_2 = 1, a_3 \geq 2$ , als im Punkt 2 der Bemerkung 1.

Wir nehmen die Notation des Haupthilfssatz 1 an. Aus der Definition der Funktion  $\psi_\alpha^{[2]*}$  folgt:

**Haupthilfssatz 2.** Um zu zeigen, dass  $x_1 < x_2$  zwei sukzessive Elemente aus  $\mathfrak{Q}$  sind, genügt es, folgendes zu beweisen:

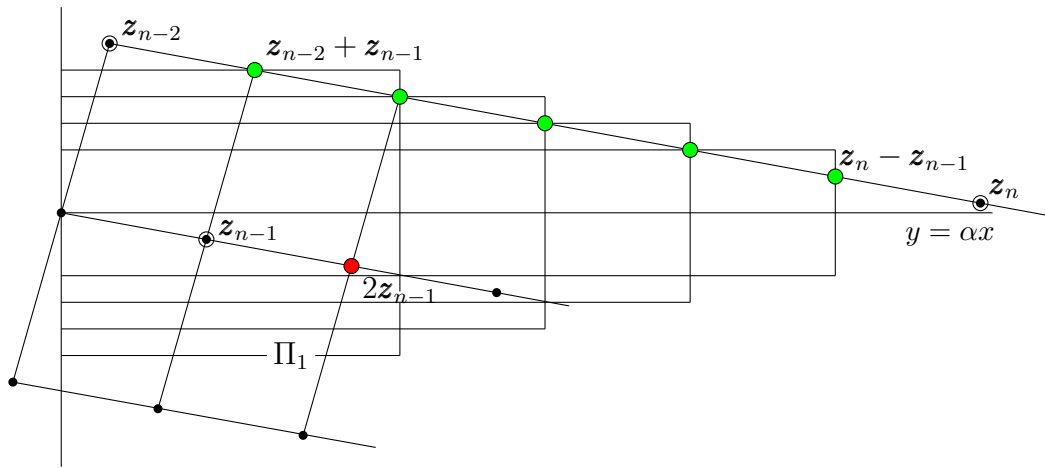
- für einige  $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$  die Gitterpunkte  $\mathbf{w}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{w}_2 = (x_2, y_2)$  auf dem Rand des Parallelogrammes  $\Pi[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]$  liegen;
- das Parallelogramm  $\Omega[\mathbf{w}_1]$  hat einen inneren Punkt  $\mathbf{z}_{\nu_1} = (p_{\nu_1}, q_{\nu_1})$ ;
- das Parallelogramm  $\Omega[\mathbf{w}_2]$  hat einen inneren Punkt  $\mathbf{z}_{\nu_2} = (p_{\nu_2}, q_{\nu_2})$  auch;
- falls  $\mathbf{z} \in \Pi[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]$  ein Gitterpunkt ist, dann  $\mathbf{z} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$  oder  $\mathbf{z} = k \cdot \mathbf{z}_\nu$  mit einem  $\nu \geq -1$  und  $k \in \mathbb{Z}_+$ .

Die folgende Hilfssätze sind klar. Hier geben wir keine Beweise. Elemente der Sequenz  $\mathfrak{X}$  entsprechen grünen Punkten auf den Figuren 6 und 7.

**Hilfssatz 8.**<sup>3</sup> Sei  $a_n \geq 2$ . Dann

$$q_{n-2} + jq_{n-1}, \quad 1 \leq j \leq a_n - 1$$

sind  $a_n - 2$  sukzessive Elemente der Sequenz  $\mathfrak{X}$  (siehe Fig. 6).



Figur 6:  $a_n = 6$

**Hilfssatz 9.** Sei  $a_n, a_{n+1} \geq 2$ . Dann

$$q_n - q_{n-1}, \quad q_n + q_{n-1}$$

sind zwei sukzessive Elemente der Sequenz  $\mathfrak{X}$  (siehe Fig 2.).

**Hilfssatz 10.** Sei  $a_n \geq 2, a_{n+1} = 1$ . Dann

$$q_n - q_{n-1}, \quad 2q_{n-1} + q_n$$

sind zwei sukzessive Elemente der Sequenz  $\mathfrak{X}$  (siehe Fig 3.).

**Hilfssatz 11.** Sei  $a_n = 1, a_{n+1} \geq 2$ . Dann

$$2q_{n-2} - q_{n-1}, \quad q_{n+1} - q_n$$

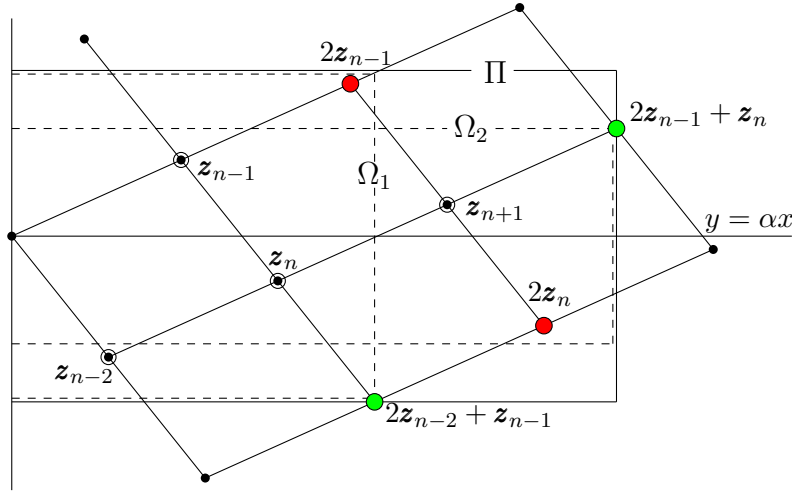
sind zwei sukzessive Elemente der Sequenz  $\mathfrak{X}$  (siehe Fig 4.).

**Hilfssatz 12.** Sei  $a_n = a_{n+1} = 1$ . Dann

$$2q_{n-2} + q_{n-1}, \quad 2q_{n-1} + q_n$$

sind zwei sukzessive Elemente der Sequenz  $\mathfrak{X}$  (siehe Fig 7.).

<sup>3</sup>Der Autor dankt Prof. V. Bykovskii, der ihm diese Behauptung erklärt hatte.



Figur 7:  $a_n = a_{n+1} = 1$

Satz 2 folgt nach Hilfssätze 8 - 12.

#### 4. Über diophantische Spektren.

##### 4.1. Asudrückte mit Kettenbrüchen.

Wir setzen

$$\varkappa_n^1 = \varkappa_n^1(\alpha) = (q_{n-2} + q_{n-1})(\xi_{n-2} - \xi_{n-1}) = \frac{(1 + \alpha_{n-1}^*)(\alpha_n - 1)}{\alpha_n + \alpha_{n-1}^*}, \quad (21)$$

$$\varkappa_n^2 = \varkappa_n^2(\alpha) = (q_n - q_{n-1})(\xi_{n-1} + \xi_n) = \frac{(1 - \alpha_n^*)(\alpha_{n+1} + 1)}{\alpha_{n+1} + \alpha_n^*}, \quad (22)$$

$$\varkappa_n^3 = \varkappa_n^3(\alpha) = (2q_{n-2} + q_{n-1})(2\xi_{n-2} - \xi_{n-1}) = \frac{(2\alpha_{n-1}^* + 1)(2\alpha_n - 1)}{\alpha_n + \alpha_{n-1}^*}, \quad (23)$$

$$\varkappa_n^4 = \varkappa_n^4(\alpha) = 4q_{n-1}\xi_{n-1} = \frac{4}{\alpha_n + \alpha_{n-1}^*}. \quad (24)$$

Die Gleichungen (21) – (24) folgen aus (2) und (3). Die letzte Gleichung in (24) sehr bekanntlich ist ([4], Appendix 1), sie hat viele Anwendungen. Nach dem Satz 1 folgt

$$\mathfrak{k}_\nu = \varkappa_n^j$$

mit einem  $n = n(\nu)$  und einem  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Beide Funktionen  $\frac{(1+x)(y-1)}{x+y}$  und  $\frac{(2x+1)(2y-1)}{x+y}$  steigen in  $x$  und  $y$  im Bereich  $x > 0, y > 1$ . Die Funktion  $\frac{(1-x)(y+1)}{x+y}$  fällt in  $x$  und  $y$ . Daraus folgt

$$1 \leq \varkappa_n^3 \leq 6, \quad (25)$$

und falls  $a_n \geq 2$ , haben wir

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a_n - 1}{a_n} \leq \varkappa_n^1, \varkappa_n^2 \leq \frac{2a_n}{a_n + 2} < 2. \quad (26)$$

**Bemerkung 3.** Falls  $a_n \geq 2$ , die Werte  $\varkappa_n^1$  und  $\varkappa_n^2$  eine Symmetrie haben: die Auswechslung  $\alpha_n \mapsto \frac{1}{\alpha_{n-1}^*}, \alpha_{n-1} \mapsto \frac{1}{\alpha_n}$  gibt uns  $\varkappa_n^1 \mapsto \varkappa_{n-1}^2$ .

**Bemerkung 4.** Falls  $a_n = 1$ , ist

$$2q_{n-1} + q_n = q_{n-1} + q_{n+1} \quad (27)$$

und können wir  $\varkappa_n^3$  in einer symmetrischen Weise schreiben:

$$\varkappa_n^3 = (q_{n-2} + q_n)(\xi_{n-2} - \xi_n). \quad (28)$$

**Bemerkung 5.** Falls  $a_n = 2$ , haben wir

$$q_n - q_{n-1} = q_{n-1} + q_{n-2} \quad (29)$$

und  $\varkappa_n^1 = \varkappa_n^2$ .

Sei

$$\mathfrak{l}_n^* = \mathfrak{l}_n^*(\alpha) = \begin{cases} \varkappa_n^3 & \text{falls } a_n = 1, \\ \min(\varkappa_n^1, \varkappa_n^2) & \text{falls } a_n \geq 2. \end{cases}$$

Wegen  $\min_{1 \leq j \leq a_n-1} (q_{n-2} + jq_{n-1})(\xi_{n-2} - j\xi_{n-1}) = \min(\varkappa_n^1, \varkappa_n^2)$  nach Satz 2 folgt

$$\mathfrak{j}^*(\alpha) = \inf \mathfrak{l}_n^*, \quad \mathfrak{k}^* = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{l}_n^*.$$

**Hilfssatz 13.**

1. Es sei  $a_n = 1, a_{n+1} \geq 2$  und  $\varkappa_n^3 < \varkappa_{n+1}^1$ . Dann ist  $a_{n+1} \geq 4$  und  $\varkappa_n^3 > \varkappa_{n+1}^4$ .
2. Es sei  $a_n = 1, a_{n-1} \geq 2$  und  $\varkappa_n^3 < \varkappa_{n-1}^2$ . Dann ist  $a_{n-1} \geq 4$  und  $\varkappa_n^3 > \varkappa_{n-1}^4$ .
3. Es sei  $\alpha \not\sim \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Dann ist

$$\mathfrak{k}(\alpha) = \liminf_{n \rightarrow \infty: a_n \geq 2} \min(\varkappa_n^1, \varkappa_n^2, \varkappa_n^4).$$

4. Falls  $a_n \geq 8$ , ist

$$\varkappa_n^4 = \min_{1 \leq j \leq 4} \varkappa_n^j$$

und für  $\alpha$  mit unendlich vielen  $a_n \geq 8$  man hat

$$\mathfrak{k}(\alpha) = \liminf_{n \rightarrow \infty, a_n \geq 8} \varkappa_n^4 = 4\lambda(\alpha). \quad (30)$$

**Beweis.** Hier werden wir nur die erste Behauptung beweisen. Beweis der zweiten Behauptung verläuft analog. Behauptung 3 folgt aus den Behauptungen 1,2. Behauptung 4 ist klar.

Bemerken wir, dass  $\alpha_n = 1 + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$  und  $\frac{1}{\alpha_n^*} = 1 + \alpha_{n-1}^*$ . Aus Definitionen (21,23) folgt

$$(2q_{n-2} + q_{n-1})(2\xi_{n-2} - \xi_{n-1}) < (q_{n-1} + q_n)(\xi_{n-1} - \xi_n),$$

sodass (2,3) geben uns

$$(2\alpha_{n-1}^* + 1)(2\alpha_n - 1) < \left(1 + \frac{1}{\alpha_n^*}\right) \left(1 - \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)$$

und

$$\frac{2 + \alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1} - 1} = \frac{2 \left(1 + \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) - 1}{1 - \frac{1}{\alpha_{n+1}}} = \frac{2\alpha_n - 1}{1 - \frac{1}{\alpha_{n+1}}} < \frac{1 + \frac{1}{\alpha_n^*}}{2\alpha_{n-1}^* + 1} = \frac{1 + \frac{1}{1 + \alpha_{n-1}^*}}{2\alpha_{n-1}^* + 1} < \sup_{0 < x < 1} \frac{2 + x}{2x + 1} = 2.$$

Die Ungleichung  $\alpha_{n+1} > 4$  folgt daraus und so  $a_{n+1} \geq 4$ . Nun aus (25) und Definition (24) folgt  $\varkappa_{n+1}^4 < 1 < \varkappa_n^3$ .  $\square$

**4.2. Beweis der Formeln (6) und (7).**

Es ist klar dass für  $\alpha = \sqrt{2}$  gilt  $\lambda(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{8}}$  und  $\mathfrak{k}(\sqrt{2}) = \mathfrak{k}^*(\sqrt{2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{x}_n^2 = \frac{[1;2]}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , und (7) ist bewiesen.

Um zu zeigen (6), wir betrachten drei Fälle.

**Fall 1<sup>0</sup>.** Es gibt unendlich viele  $n$  mit  $a_n \geq 4$ . Dann  $\lambda(\alpha) \leq \frac{1}{4}$ . Aus (26) folgt, dass  $\mathfrak{x}_n^1, \mathfrak{x}_n^2 \geq \frac{1}{2}$ . Sodass nach Hilfssatz 13 (Behauptung 3) haben wir  $\mathfrak{k}(\alpha) \geq 2\lambda(\alpha)$ .

**Fall 2<sup>0</sup>.** Für alle hinreichend großen  $n$ , alle Teilennern  $a_n$  sind  $\leq 3$ . Dann

$$\lambda(\alpha) \leq \frac{1}{3 + 2 \cdot [0; \overline{3, 1}]} < \frac{[1; \overline{3}]}{4} \leq \frac{1}{2} \cdot \min \left( \liminf_{n \rightarrow \infty: a_n \geq 2} \mathfrak{x}_n^1, \liminf_{n \rightarrow \infty: a_n \geq 2} \mathfrak{x}_n^2 \right) \leq \frac{\mathfrak{k}(\alpha)}{2}$$

und alles ist bewiesen.

**Fall 3<sup>0</sup>.** Für alle hinreichend großen  $n$ , man hat  $a_n \in \{1, 2\}$ . Für  $\alpha \sim \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  haben wir  $\mathfrak{k}(\alpha) = 4\lambda(\alpha)$ . Für  $\alpha \sim \sqrt{2}$  haben wir  $\mathfrak{k}(\alpha) = 2\lambda(\alpha)$ . Falls  $\alpha \not\sim \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  und  $\alpha \not\sim \sqrt{2}$ , nach der Struktur des Lagrangeschen Spektrums (Kapitel II aus [3] oder [4]) haben wir  $\lambda(\alpha) \leq \frac{5}{\sqrt{221}} = 0.3363^+$  und  $\liminf_{n \rightarrow \infty: a_n = 2} \mathfrak{x}_n^1 \geq \frac{[1;2]}{2} = 0.683^+$ . Sodass  $\mathfrak{k}(\alpha) \geq 2\lambda(\alpha)$  und alles ist bewiesen.

### 4.3. Das Spektrum $\mathbb{L}_2$ .

#### Satz 3.

1. Das maximal Element des Spektrum  $\mathbb{L}_2$  ist  $\frac{4}{\sqrt{5}}$ , und  $\mathfrak{k}(\alpha) = \frac{4}{\sqrt{5}}$  gilt dann und nur dann, wenn  $\alpha$  und  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  sind äquivalent.
2. Sei  $\alpha$  irrational, und  $\alpha, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  seien miteinander äquivalent nicht. Gilt dann  $\mathfrak{k}(\alpha) \leq \frac{4}{\sqrt{17}}$ , so ist  $\left(\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$  eine Lücke im Spektrum  $\mathbb{L}_2$ .
3.  $\mathfrak{k}(\alpha) = \frac{4}{\sqrt{17}}$  gilt dann und nur dann, wenn  $\alpha$  und  $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$  sind äquivalent.
4.  $\frac{4}{\sqrt{17}}$  ist ein isolierter Punkt der Menge  $\mathbb{L}_2$ .
5. Das ganze Segment  $\left[0, \frac{12}{21+\sqrt{15}}\right]$  zum Spektrum  $\mathbb{L}_2$  gehört.<sup>4</sup>

Beweis.

Für  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [\overline{1}]$  ist

$$\mathfrak{k} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{x}_n^4 = \frac{4}{\sqrt{5}},$$

und für  $\alpha = \frac{1+\sqrt{17}}{2} = [2; \overline{1, 1, 3}]$  ist

$$\mathfrak{k} \left( \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{x}_{3n}^4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{x}_{3n}^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{x}_{3n}^2 = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Wir zeigen nun, dass aus  $\alpha \not\sim \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  folgt  $\mathfrak{k}(\alpha) \leq \frac{4}{\sqrt{17}}$ . Dann werden Behauptungen 1 und 2 bewiesen.

Falls  $\alpha \not\sim \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2}$  haben wir die folgenden Fälle 1 - 3 und 4.1 - 4.3.

**Fall 1<sup>0</sup>.** Es gibt unendlich viele  $n$  mit  $a_n \geq 5$ . Dann für diese  $n$  ist  $\mathfrak{x}_n^4 \leq \frac{4}{5} < \frac{4}{\sqrt{17}}$ .

**Fall 2<sup>0</sup>.** Für alle hinreichend großen  $n$  man hat  $a_n \leq 4$ , und es gibt unendlich viele  $n$  mit  $a_n = 4$ . Dann für diese  $n$  ist

$$\mathfrak{k}(\alpha) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty, a_n = 4} \mathfrak{x}_n^4 \leq \frac{4}{4 + 2 \cdot [0; \overline{4, 1}]} = \frac{4}{3 + \sqrt{2}} < \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

---

<sup>4</sup>Man kann leicht beweisen, dass ein großer Segment zum  $\mathbb{L}_2$  gehört.



**Fall 3<sup>0</sup>.** Für alle hinreichend großen  $n$  man hat  $a_n \leq 4$ , und es gibt unendlich viele  $n$  mit  $a_n = 2$ . Dann ist

$$\mathfrak{k}(\alpha) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty, a_n=2} \mathfrak{x}_n^1 \leq \frac{[1; \overline{1, 4}]^2}{[2; \overline{1, 4}] + [0; \overline{1, 4}]} = \sqrt{2} - \frac{1}{2} < \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

**Fall 4<sup>0</sup>.** Für alle hinreichend großen  $n$  man hat  $a_n \in \{1, 3\}$

**Teilfall 4.1<sup>0</sup>.** Es gibt unendlich viele  $n$  mit

$$a_{n-1} = a_n = 3.$$

Dann ist

$$\alpha_{n-1}^* \leq [0; 3, 3] = \frac{13}{10}, \quad \alpha_n \leq 4,$$

und  $\mathfrak{x}_n^1 \leq \frac{39}{43} < \frac{4}{\sqrt{17}}$ .

**Teilfall 4.2<sup>0</sup>.** Es gibt unendlich viele  $n$  mit

$$a_{n-1} = 3, a_n = 1, a_{n+1} = 3.$$

Falls  $a_{n-2} = 3$  haben wir den Teilfall 4.1<sup>0</sup>. Sei  $a_{n-2} = 1$ . Dann ist

$$\mathfrak{x}_{n-1}^4 \leq \frac{4}{[3; 1, 3, 3] + [0; 1, 1]} = \frac{104}{111} < \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

**Teilfall 4.3<sup>0</sup>.** Es gibt unendlich viele  $n$  mit

$$a_{n-2} = a_{n-1} = 1, a_n = 3, a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = 1.$$

Dann ist

$$\mathfrak{x}_n^4 \leq \frac{4}{[3; 1, 1, 1, 1] + [0; 1, 1, 3]} = \frac{140}{146} < \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Also in allen Fällen haben wir  $\mathfrak{k}(\alpha) \leq \frac{140}{146}$ , und damit sind Behauptungen 1,2 und 3,4 bewiesen.

Das Segment  $\left[0, \frac{3}{21+\sqrt{15}}\right]$  zum Lagrangeschen Spektrum  $\mathbb{L}$  gehört. Wegen  $\frac{21+\sqrt{15}}{3} = [8; \overline{6, 1}] + [0; \overline{6, 1}]$ , für alle  $\lambda \in \left[0, \frac{3}{21+\sqrt{15}}\right]$  gibt es  $\alpha$  mit unendlich vielen  $a_n \geq 8$  und  $\lambda(\alpha) = \lambda$ . Nach Hilfssatz 13 (Behauptung 4) haben wir (30). Sodass ist  $\left[0, \frac{12}{21+\sqrt{15}}\right] \subset \mathbb{L}_2$ .  $\square$

#### 4.4. Das Spektrum $\mathbb{L}_2^*$ .

##### Satz 4.

1. Das maximal Element des Spektrum  $\mathbb{L}_2^*$  ist  $\sqrt{5}$ , und  $\mathfrak{k}^*(\alpha) = \sqrt{5}$  gilt dann und nur dann, wenn  $\alpha$  und  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  sind äquivalent.
2. Sei  $\alpha$  irrational, und  $\alpha, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  seien miteinander äquivalent nicht. Gilt dann  $\mathfrak{k}^*(\alpha) \leq \frac{3}{2}$ , so ist  $(\frac{3}{2}, \sqrt{5})$  eine Lücke in dem Spektrum  $\mathbb{L}_2^*$ .
3. Für  $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$  ist  $\mathfrak{k}^*(e) = \frac{3}{2}$ .
4.  $\frac{3}{2}$  ist ein Häufungspunkt der Menge  $\mathbb{L}_2^*$ .
5. Das minimal Element des Spektrum  $\mathbb{L}_2^*$  ist  $\frac{1}{2}$ .
6. Das ganze Segment  $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$  zum Spektrum  $\mathbb{L}_2^*$  gehört.

Beweis.

Es ist klar, dass falls  $\alpha \sim \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , gilt  $\mathfrak{k}^*(\alpha) = \sqrt{5}$ . Betrachten wir eine irrationale  $\alpha \not\sim \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Wir finden unendlich viele  $n$  mit  $\mathfrak{l}_n^*(\alpha) \leq \frac{3}{2}$ . Es genügt, die Beweise der Behauptungen 1 und 2 zu beenden.

Für  $\alpha \not\sim \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  betrachten wir einige Fälle.

**Fall 1<sup>0</sup>.** Es gibt unendlich viele  $n$  mit  $a_n \geq 2$  und  $a_{n+1} \geq 2$ . Dann  $\varkappa_{n+1}^1 \leq 1 + \alpha_n^* \leq \frac{3}{2}$ .

**Fall 2<sup>0</sup>.** Für alle hinreichend großen  $n$ , entweder  $a_n = 1$  oder  $a_{n+1} = 1$ . In diesem Fall der Kettenbruch für  $\alpha$  ist

$$\alpha = [a_0; \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{r_1}, a_{n_1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{r_2}, a_{n_2}, \underbrace{1, \dots, 1}_{r_3}, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{r_j}, a_{n_j}, \underbrace{1, \dots, 1}_{r_{j+1}}, \dots], \quad r_j \geq 1, \quad a_{n_j} \geq 2. \quad (31)$$

**Teilfall 2.1<sup>0</sup>.** Es gibt unendlich viele  $j$  mit  $r_j = 1$ . Dann gibt es unendlich viele  $n$  mit

$$a_{n-1} \geq 2, a_n = 1, a_{n+1} \geq 2.$$

**Teilfall 2.1.1<sup>0</sup>.**  $a_{n-1} \leq 6$  oder  $a_{n+1} \leq 6$ . Dann aus (26) folgt  $\min(\varkappa_{n-1}^1, \varkappa_{n+1}^1) \leq \frac{3}{2}$ .

**Teilfall 2.1.2<sup>0</sup>.**  $\min(a_{n-1}, a_{n+1}) \geq 7$ . Dann gelten  $\alpha_n = [1; a_{n+1}, \dots] \leq \frac{8}{7}$  und  $\alpha_{n-1}^* = [0; a_{n-1}, \dots] \leq \frac{1}{7}$ , und aus der Definition (23) haben wir  $\varkappa_n^3 \leq \frac{9}{7} < \frac{3}{2}$ .

**Teilfall 2.2<sup>0</sup>.** Für alle hinreichend großen  $j$ , man hat  $r_j \geq 2$ .

**Teilfall 2.2.1<sup>0</sup>.** Es gibt unendlich viele  $j$  mit  $r_j = 2$ . Dann gibt es unendlich viele  $n$  mit

$$a_{n-2} = a_{n-1} = 1, a_n = a \geq 2, a_{n+1} = a_{n+2} = 1, a_{n+3} = b \geq 2, a_{n+4} = a_{n+5} = 1.$$

Falls  $a \geq b$ , haben wir  $\alpha_{n+3} = [b; 1, 1, \dots] \leq [b; 1, 1, 1] = b + \frac{2}{3}$  und  $\alpha_{n+2}^* = [0; 1, 1, a, 1, 1, \dots] \leq [0; 1, 1, b, 1, 1] = \frac{2b+3}{4b+4}$ . Dann gilt  $\varkappa_{n+3}^1 \leq \frac{18b^2+15b-7}{12b^2+26b+17} < \frac{3}{2}$  für alle  $b$ .

Falls  $a \geq b$ , beweisen wir (siehe Bemerkung 3), dass  $\varkappa_n^2 < \frac{3}{2}$  für alle  $a$ .

**Teilfall 2.2.2<sup>0</sup>.** Für alle hinreichend großen  $j$ , man hat  $r_j \geq 3$ .

**Teilfall 2.2.2.1<sup>0</sup>.** Es gibt unendlich viele  $n$  mit

$$a_{n-3} = a_{n-2} = a_{n-1} = 1, a_n = a, a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = 1$$

und  $2 \leq a \leq 15$ . In diesem Falle haben wir

$$\alpha_n = [a; 1, 1, 1, \dots] \leq [a; 1, 1, 1, 1] = a + \frac{2}{3} \leq \frac{47}{3}, \quad \alpha_{n-1}^* = [0; 1, 1, 1, \dots] \leq \frac{2}{3},$$

und  $\varkappa_n^1 \leq \frac{220}{147} < \frac{3}{2}$ .

**Teilfall 2.2.2.2<sup>0</sup>.** Es gibt unendlich viele  $n$  mit

$$a_{n-3} = a_{n-2} = a_{n-1} = 1, a_n = a, a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = 1, a_{n+4} = b, a_{n+5} = a_{n+6} = a_{n+7} = 1,$$

und  $a \geq 16, b \geq 16$ . In diesem Falle haben wir

$$\alpha_{n+3} = [1; b, 1, 1, 1, \dots] \leq [1; 16, 1, 1, 1, 1] = \frac{88}{83}, \quad \alpha_{n+2}^* = [0; 1, 1, a, 1, 1, 1, \dots] \leq [0; 1, 1, 16, 1, 1, 1, 1] = \frac{88}{171},$$

und  $\varkappa_{n+3}^3 \leq \frac{(2 \cdot \frac{88}{171} + 1)(2 \cdot \frac{88}{83} - 1)}{\frac{88}{171} + \frac{88}{83}} < \frac{3}{2}$ .

**Teilfall 2.2.2.3<sup>0</sup>.** Es gibt unendlich viele  $n$  mit

$$a_{n-4} = a_{n-3} = a_{n-2} = a_{n-1} = 1, a_n = a, a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = a_{n+4} = 1.$$

Falls  $a \leq 19$ , haben wir

$$\alpha_n = [a; 1, 1, 1, 1, \dots] \leq [a; 1, 1, 1, 1, 1] = a + \frac{5}{8} \leq \frac{157}{8}, \quad \alpha_{n-1}^* = [0; 1, 1, 1, 1, \dots] \leq [0; 1, 1, 1, 1, 1] = \frac{5}{8},$$

sodass  $\varkappa_n^1 \leq \frac{13 \cdot 149}{8 \cdot 163} < \frac{3}{2}$ .

Falls  $a \geq 20$ , haben wir

$$\alpha_{n-1} = [1; a, 1, 1, 1, 1, \dots] \leq 1 + \frac{1}{a + \frac{3}{5}} \leq \frac{108}{103}, \quad \alpha_{n-2}^* = [0; 1, 1, 1, \dots] \leq [0; 1, 1, 1] = \frac{2}{3},$$

sodass  $\varkappa_{n-1}^3 \leq \frac{7 \cdot 113}{530} < \frac{3}{2}$ .

Also in allen Fällen haben wir unendlich viele  $n$  mit  $\mathfrak{l}_n^* \leq \frac{3}{2}$  gefunden, und damit sind die Behauptungen 1,2 bewiesen.

Sei  $\{a_j\}_{j=0}^\infty$  eine ganzzahlige Sequenz mit  $\lim_{j \rightarrow +\infty} a_j = +\infty$ . Betrachten wir  $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_t, \overline{a_j, 1, 1}_{j=t+1}^\infty]$ . Es ist klar aus dem Beweis des Teilfalles 2.2.1<sup>0</sup>, dass  $\lim_{j \rightarrow \infty} \varkappa_{t+1+3j}^1 = \frac{3}{2}$  und  $\mathfrak{k}^*(\alpha) = \frac{3}{2}$ . Als  $e = [2; 1, \overline{2+2j, 1, 1}_{j=0}^\infty]$ , gilt auch  $\mathfrak{k}^*(e) = \frac{3}{2}$ , und die Behauptung 3 ist bewiesen.

Behauptung 4 ist klar.

Für jede irrationale  $\alpha$  aus (25,26) folgt  $\mathfrak{k}(\alpha) \geq \frac{1}{2}$ . Sei  $\{b_j\}_{j=0}^\infty$  eine ganzzahlige Sequenz mit  $\lim_{j \rightarrow +\infty} b_j = +\infty$ . Definieren wir  $\beta = [0; \overline{b_j, 2}_{j=0}^\infty]$ . Dann gilt  $\lim_{j \rightarrow \infty} \varkappa_{2j}^1 = \frac{1}{2}$ . Sodass  $\mathfrak{k}^*(\beta) = \frac{1}{2} = \min \mathbb{L}_2^*$  und wir haben Behauptung 5 bewiesen.

Nun sollen wir die Behauptung 6 beweisen. Hier verwenden wir eine Methode von M. Hall [5]. Wir nutzen eine Verallgemeinerung aus [1, 2, 9].

Bezeichnen wir mit  $\mathcal{F}$  die Menge aller endlichen und unendlichen Kettenbrüche  $\xi = [0; a_1, \dots, a_n, \dots]$  aus dem Segment  $[0, \frac{1}{3}]$ , deren Teilnenner nicht gleich zu 2 sind:

$$\mathcal{F} = \left\{ \xi \in \left[ 0, \frac{1}{3} \right] : \xi \text{ kann durch einen endlichen oder unendlichen Kettenbruch} \right.$$

$$\left. \xi = [0; a_1, \dots, a_n, \dots] \text{ dargestellt werden mit } a_k \neq 2 \ \forall k \right\}.$$

Dann

$$\mathcal{F} = \left[ 0, \frac{1}{3} \right] \setminus \left( \bigcup_{\nu=1}^\infty \Delta_\nu \right),$$

wo  $\Delta_\nu$  sind offene Intervalle. Diese Intervalle können so geordnet werden, dass das Folgendes gilt (siehe Hilfssatz 4.3 aus [2] mit  $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots = 1, 3, 4, 5, \dots$ ). Für jede  $T$  man hat

$$\left[ 0, \frac{1}{3} \right] \setminus \left( \bigcup_{\nu=1}^T \Delta_\nu \right) = \bigcup_{j=1}^{T+1} I_{T,j}.$$

wo  $I_{T,j}$  abgeschlossene Segmente sind, und falls

$$\Delta_{T+1} \subset I_{T,j^*},$$

gilt

$$I_{T,j^*} = M_1 \sqcup \Delta_{T+1} \sqcup M_2,$$

wo für die Längen der Intervalle  $M_k, k = 1, 2$  man hat

$$\min(\text{Länge } M_1, \text{ Länge } M_2) \geq \tau \cdot \text{Länge } \Delta_{T+1}, \quad \tau = 2.$$

Definieren wir

$$H(x, y) = \frac{(1+x)(1+y)}{2+x+y}.$$

Dann

$$\frac{\partial H/\partial x}{\partial H/\partial y} = \left( \frac{1+y}{1+x} \right)^2, \quad \frac{\partial H/\partial y}{\partial H/\partial x} = \left( \frac{1+x}{1+y} \right)^2,$$

und

$$\max_{0 \leq x, y \leq \frac{1}{3}} \max \left( \left| \frac{\partial H/\partial x}{\partial H/\partial y} \right|, \left| \frac{\partial H/\partial y}{\partial H/\partial x} \right| \right) \leq \frac{16}{9} < 2 = \tau.$$

Nun nach Hilfssatz 2 aus [1] folgt, dass das Bild der Menge  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$  unter  $H$  ein abgeschlossenes Intervall ist:

$$H(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = \left[ H(0, 0), H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right] = \left[ \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right].$$

Bemerken wir, dass falls  $a_n = 2$ , man hat

$$\varkappa_n^1 = \varkappa_n^2 = H(\alpha_{n-1}^*, 1/\alpha_{n+1}),$$

und falls  $a_n \neq 2$ , aus (25,26) folgen

$$\min(\varkappa_n^1, \varkappa_n^2, \varkappa_n^3) \geq \frac{2}{3}.$$

Nun nehmen wir  $k \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ . Betrachten wir zwei irrationale Zahlen

$$x = [0; x_1, \dots, x_n, \dots], y = [0; y_1, \dots, y_n, \dots] \in \mathcal{F}$$

mit

$$H(x, y) = k$$

und den Kettenbruch

$$\alpha = [0; \underbrace{x_1, 2, y_1}_{}, \underbrace{x_2, x_1 2, y_1, y_2}_{}, \underbrace{x_3, x_2, x_1 2, y_1, y_2, z_3}_{}, \dots, \underbrace{x_k, x_{k-1}, \dots, x_2, x_1, 2, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k}_{}, \dots].$$

Wegen  $x_n, y_n \neq 2$ , es ist klar, dass  $\mathfrak{k}^*(\alpha) = k$ .  $\square$

**Bemerkung 6.** In [1] Hilfssatz 2 wurde ohne Beweis formuliert. Aber der Beweis folgt sofort aus dem Argument aus [9].

Der Autor dankt Oleg N. German, Igor D. Kan und Igor P. Rochev für die fruchtbaren Diskussionen.

## References

- [1] Aleksenko A., *A spectrum associated with Minkowski diagonal continued fraction*, Chebyshevskii sbornik, 12:4 (2011), 29 - 34.
- [2] Astels S., *Cantor sets and numbers with restricted partial quotients*, Trans. Amer. Math. Soc., 352:1 (1999), 133-170.
- [3] J.W.S. Cassels, *An introduction to Diophantine approximations*, Cambridge Univ. Press, 1957.
- [4] T.W. Cusick, M.E. Flahive, *The Markoff and Lagrange spectra*, Math. Surveys Monogr., vol. 30, Amer. Math. Soc., Providence, RI 1989.
- [5] Hall M. Jr., *On the sum and product of continued fractions*, Annales of Mathematics, 48:4 (1947), 966-993.
- [6] A.-M. Legendre, *Théorie des Nombres* T.1, 1830.

- [7] D.H. Lehmer, *Euclid's Algorithm for Large Numbers*, American Mathematical Monthly, 45:4 (1938), 227-233.
- [8] E. Lucas, *Théorie des Nombres*, 1891.
- [9] Moshchevitin N.G., *On a theorem of M. Hall*, Russian Mathematical Surveys, 52:6 (1997), 1312-1313.
- [10] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Leipzig und Berlin, Verlag und Druck von. B.G. Teubner, 1929.
- [11] Б.А. Венков, *Элементарная теория чисел*, 1937.